Отчёт за 2018 год по конкурсу «Молодая математика России»

Герман О. Н.

Полученные в 2018 году результаты

В этом году удалось продвинуться в двух направлениях, имеющих отношение к диофантовым экспонентам решёток. Напомним, диофантовой экспонентой решётки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ полного ранга называется величина

$$\omega(\Lambda) = \sup \left\{ \gamma \in \mathbb{R} \,\middle|\, \Pi(\mathbf{x}) \leqslant |\mathbf{x}|^{-\gamma} \text{ имеет } \infty \text{ решений в } \mathbf{x} \in \Lambda \right\},$$

где $\Pi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{d} |x_i|^{1/d}$ при $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. На данный момент остаётся открытой гипотеза о том, что при любом d спектр этой величины

$$\Omega_d = \left\{ \omega(\Lambda) \,\middle|\, \Lambda \text{ — решётка в } \mathbb{R}^d \right\}$$

совпадает с лучом $[0; +\infty]$. Нам удалось получить следующий результат.

Теорема 1. *При любом $d \geqslant 3$ справедливо включение*

$$\left[3 - \frac{d}{(d-1)^2}\,, +\infty \right] \subset \Omega_d\,.$$

Этот результат был получен как следствие новой теоремы о линейных формах заданного диофантового типа. А именно, была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Для любых $d \geqslant 3$, $\beta > 0$ положим $f_d(\beta) = (d-2)\beta^2 + (2d-3)\beta$. Тогда найдётся линейная форма L от d переменных, такая что*

(i) *для $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, принадлежащих множеству наилучших приближений формы L, справедливо*

$$|L(\mathbf{z})| \cdot |\mathbf{z}|^{d-1} \asymp |\mathbf{z}|^{-f_d(\beta)};$$

(ii) *для $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^d$, не являющихся целочисленно кратными никаким наилучшим приближениям формы L, справедливо*

$$|L_{\boldsymbol{\alpha}}(\mathbf{z})| \cdot |\mathbf{z}|^{d-1} \gg |\mathbf{z}|^{-f_d(\beta)+(d-1)\beta};$$

(iii) *набор асимптотических направлений для наилучших приближений формы L состоит ровно из двух (пар) точек.*

Данная теорема является многомерным аналогом теоремы о линейных формах заданного диофантового типа, доказанной автором совместно с Н. Г. Мощевитиным в 2010 году (опубликованной в JTNB), причём аналогом усиленным, ибо в упомянутой работе речь шла лишь о пункте (i). Таким образом, теорема 2 интересна и сама по себе.

Второе направление, в котором удалось продвинуться, касается параметрической геометрии чисел. Данная наука была инициирована несколько лет назад В. М. Шмидтом и Л. Суммерером. В рамках предпринятого исследования удалось перенести их подход на случай произведения d линейно независимых линейных форм от d переменных, иными словами, на случай произвольной решётки в $\mathbb{R}^d$ полного ранга. Это позволило представить неравенство переноса

$$\frac{1+\omega(\Lambda)^{-1}}{d-1} \leqslant (d-1)(1+\omega(\Lambda^*)^{-1}) \tag{1}$$

где Λ^* — решётка, двойственная Λ, полученное автором в 2016 году, в виде цепочки неравенств для промежуточных экспонент в духе Шмидта–Суммерера. В частности, при этом были доказаны локальные теоремы, из которых следуют большинство существующих на данный момент неравенств переноса.

Опишем коротко построенный аналог теории Шмидта–Суммерера для случая произвольной решётки $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ полного ранга с определителем равным 1. Положим

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, |\mathbf{x}| \leqslant 1 \right\}.$$

Для каждого $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}^d$, $\tau_1 + \ldots + \tau_d = 0$, положим

$$D_{\boldsymbol{\tau}} = \operatorname{diag}(e^{\tau_1}, \ldots, e^{\tau_d}), \qquad \mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}} = D_{\boldsymbol{\tau}}\mathcal{B}, \qquad |\boldsymbol{\tau}|_+ = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \tau_k.$$

Обозначим через $\lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}) = \lambda_k(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}, \Lambda)$, $k = 1, \ldots, d$, k-й последовательный минимум, то есть инфимум таких положительных λ, что $\lambda\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}$ содержит как минимум k линейно независимых векторов решётки Λ. Наконец, для каждого $k = 1, \ldots, d$ положим

$$S_k(\boldsymbol{\tau}) = S_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda) = \sum_{1\leqslant j\leqslant k} \log\big(\lambda_j(\mathcal{B}_{\boldsymbol{\tau}}, \Lambda)\big)$$

и

$$\Psi_k(\Lambda) = \liminf_{|\boldsymbol{\tau}|\to\infty} \frac{S_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda)}{|\boldsymbol{\tau}|_+}.$$

В ходе работы над проектом были доказаны следующие теоремы.

Теорема 3. *Справедливо неравенство*

$$S_1(\boldsymbol{\tau}, \Lambda) \leqslant \frac{S_1(-\boldsymbol{\tau}, \Lambda^*)}{d-1} + O(1). \tag{2}$$

Теорема 4. *Справедливы соотношения*

(i) $S_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda) = S_{d-k}(-\boldsymbol{\tau}, \Lambda^*) + O(1), \quad k = 1, \ldots, d-1,$

(ii) $S_1(\boldsymbol{\tau}, \Lambda) \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{S_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda)}{k} \leqslant \ldots \leqslant \dfrac{S_{d-1}(\boldsymbol{\tau}, \Lambda)}{d-1}.$

(iii) $\dfrac{S_1(\boldsymbol{\tau}, \Lambda)}{d-1} \geqslant \ldots \geqslant \dfrac{S_k(\boldsymbol{\tau}, \Lambda)}{d-k} \geqslant \ldots \geqslant S_{d-1}(\boldsymbol{\tau}, \Lambda).$

Теорема 3 является следствием теоремы 4, которая вдобавок разбивает неравенство (2) на последовательные неравенства между соседними S_k. При этом теорема 3 описывает локальный феномен, лежащий основе большинства неравенств переноса в теории диофантовых приближений. В частности, теорема 3 влечёт упомянутое выше неравенство переноса (1) для диофантовых экспонент решёток. Действительно, как было показано в ходе данного исследования, справедливо соотношение

$$\omega(\Lambda)^{-1} + \underline{\Psi}_1(\Lambda)^{-1} + 1 = 0.$$

Это соотношение позволяет переформулировать неравенство (1) следующим образом.

Теорема 5.

$$\underline{\Psi}_1(\Lambda) \leqslant \frac{\underline{\Psi}_1(\Lambda^*)}{(d-1)^2}. \tag{3}$$

Ввиду неравенств

$$|\boldsymbol{\tau}|_+/(d-1) \leqslant |-\boldsymbol{\tau}|_+ \leqslant (d-1)|\boldsymbol{\tau}|_+$$

теорема 5 непосредственно следует из теоремы 3.

Соответственно, из теоремы 4 мы выводим следующее утверждение.

Теорема 6.

$$\underline{\Psi}_1(\Lambda) \leqslant \ldots \leqslant \frac{\underline{\Psi}_k(\Lambda)}{k} \leqslant \ldots \leqslant \frac{\underline{\Psi}_{d-1}(\Lambda)}{d-1} \leqslant \frac{\underline{\Psi}_1(\Lambda^*)}{(d-1)^2}.$$

Данное утверждение разбивает неравенство (3) и, стало быть, неравенство (1) так же, как неравенства Лорана разбивают неравенство Хинчина.

Подготовленные в 2018 году работы

[1] O. N. German *Linear forms of a given Diophantine type and lattice exponents*, принято в печать в Известия РАН, Серия математическая; arXiv:1804.01152

[2] O. N. German *Problems concerning Diophantine exponents of lattices*, глава в совместной монографии, готовится к печати; arXiv:1811.11999

[3] O. N. German *Multiplicative parametric geometry of numbers and transference theorems for lattice exponents*, arXiv:1812.02774

Доклады на конференциях в 2018 году

- “Diophantine approximation and dynamical systems” (La Trobe University, Melbourne, Австралия, 6-8 января 2018), приглашённый доклад
- “DADS Research Week” (La Trobe University, Bendigo campus, Австралия, 9-12 января 2018), приглашённый доклад
- “Ломоносовские чтения – 2018” (Москва, Россия, 16-25 апреля 2018), устный доклад
- “6th International conference on uniform distribution theory – UDT2018” (CIRM, Marseille, Франция, 1-5 октября 2018), приглашённый доклад

Педагогическая деятельность

- Курс “Теория чисел”, мехмат, 4-й курс, лекции и семинары
- Курс “Теоретико-числовые основы криптографии”, Бакинский филиал МГУ, 2-й курс магистратуры, лекции и семинары
- Научное руководство двумя аспирантами (Ибрагим Тлюстангелов и Эльмир Бигушев) и двумя студентами (Максим Ильметов и Александр Банарь)